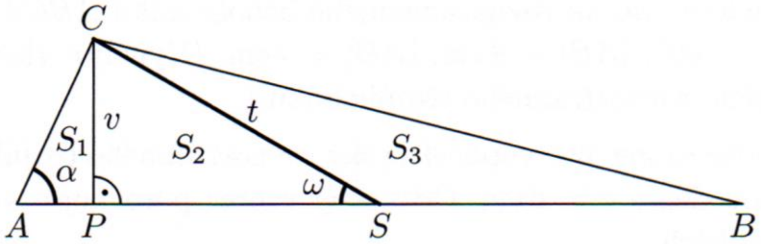
Příklad 2

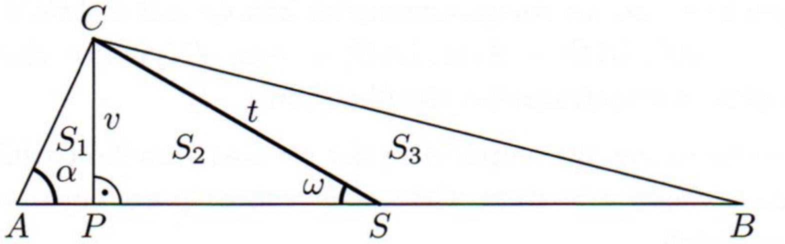
Těžnice t a výška v ke straně c rozdělí trojúhelník ABC na tři trojúhelníky, jejichž obsahy označíme S_1, S_2 a S_3. Vypočtěte tyto obsahy, je-li $|SC| = t = 10\,\mathrm{cm}$, $\omega = 30°$, $\alpha = 65°$ (obr. 68). Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obr. 68

Příklad 2

Těžnice t a výška v ke straně c rozdělí trojúhelník ABC na tři trojúhelníky, jejichž obsahy označíme S_1, S_2 a S_3. Vypočtěte tyto obsahy, je-li $|SC| = t = 10\,\text{cm}$, $\omega = 30°$, $\alpha = 65°$ (obr. 68). Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obr. 68

Řešení

Nejdříve si zapíšeme potřebné vzorce pro obsahy trojúhelníků APC, PSC, SBC:

$S_1 = \frac{1}{2}|AP| \cdot v$, $S_2 = \frac{1}{2}|PS| \cdot v$, $S_3 = \frac{1}{2}|BS| \cdot v$.

Vypočítáme v; můžeme např. užít vztah

$$\sin\omega = \frac{v}{t}.$$

$$\sin 30° = \frac{v}{10}$$

$$0{,}5 = \frac{v}{10}$$

$$v = 0{,}5 \cdot 10$$

$$v = 5$$

$$v = 5\,\text{cm}$$

Nyní už snadno vypočítáme $|PS|$ pomocí Pythagorovy věty:

$$|PS|^2 = t^2 - v^2$$

$$|PS|^2 = 100 - 25$$

$$|PS| = \sqrt{75} \doteq 8{,}66$$

$$|PS| \doteq 8{,}66\,\text{cm}$$

Nejjednodušší je výpočet S_2:

$$S_2 = \frac{1}{2}|PS| \cdot v$$

$$S_2 = 8{,}66 \cdot \frac{5}{2}$$

$$S_2 = 4{,}33 \cdot 5$$

$$S_2 = 21{,}65 \doteq 21{,}7$$

$$S_2 \doteq 21{,}7\,\mathrm{cm}^2$$

Abychom mohli vypočítat S_1, musíme znát $|AP|$. Užijeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{|AP|}$$

$$\operatorname{tg} 65^\circ = \frac{5}{|AP|}$$

$$2{,}145 \cdot |AP| = 5$$

$$|AP| = \frac{5}{2{,}145}$$

$$|AP| \doteq 2{,}331$$

$$|AP| \doteq 2{,}331\,\mathrm{cm}$$

Výpočet S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot v$$

$$S_1 = 2{,}331 \cdot \frac{5}{2}$$

$$S_1 \doteq 5{,}8$$

$$S_1 \doteq 5{,}8\,\mathrm{cm}^2$$

Před výpočtem S_3 určíme $|SB|$. Protože S je středem úsečky AB, platí

$$|SB| = 2{,}331 + 8{,}66$$
$$|SB| = 10{,}991$$

$$|SB| = 10{,}991\,\mathrm{cm}$$
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot v$$

$$S_3 = 10{,}991 \cdot \frac{5}{2}$$
$$S_3 \doteq 27{,}5$$

$$S_3 \doteq 27{,}5\,\mathrm{cm}^2$$

Protože $|AP| + |PS| = |SB|$ a výška v je společná pro trojúhelník ASC a trojúhelník SBC, musí platit, že obsahy těchto trojúhelníků jsou si rovny. Toho můžeme využít ke kontrole správnosti výpočtů. Obsah trojúhelníku ASC je roven součtu obsahů trojúhelníků APC a PSC, tedy přibližně $5{,}8\,\mathrm{cm}^2 + 21{,}7\,\mathrm{cm}^2$, což je $27{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Obsah trojúhelníku SBC je rovněž $27{,}5\,\mathrm{cm}^2$.
